

Bessel Function

Lec 23

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0 \rightarrow (1)$$

the sol. of eqn

$$J_k(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+k}}{r! \Gamma(r+k+1)} \rightarrow (2)$$

$(K_1 - K_2) \rightarrow$ non integer

جاء حل المعادلة بشكل

$$y_{G.S} = C_1 J_{K_1}(x) + C_2 \cancel{J_{K_2}(x)} J_{-K_2}(x)$$

$K_1 - K_2$ integer

الحل يكون

$$y_{G.S} = C_1 J + C_2 Y_K(x)$$

$$y_K = \lim_{n \rightarrow K} \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}}{\sin n\pi}$$

$\nabla \cdot \rho$

EX solve by series solution

$$(1) x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{16}{25}\right) y = 0$$

$$(2) x^2 y'' + x y' + (x^2 - 9) y = 0$$

Sol

$$(1) K^2 = \frac{16}{25} \quad ; \quad K = \pm \frac{4}{5}$$

$K_1 - K_2 \rightarrow$ non integer and eqn is Bessel eqn.

$$y_{G.S} = C_1 J_{\frac{4}{5}}(x) + C_2 J_{-\frac{4}{5}}(x)$$

$$J_{\frac{4}{5}}(x) = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r + \frac{4}{5}}}{r! \Gamma(r + \frac{9}{5})}$$

2) the eqn is Bessel fn.

$$K_1 = 3, K_2 = -3, K_1 - K_2 \text{ integer}$$

$$y_{G.S} = C_1 J_3(x) + C_2 Y_3(x)$$

$$J_3(x) = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+3}}{r! \Gamma(r+4)}$$

Ans P.

$$Y_3(x) = \lim_{n \rightarrow 3} \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_n(x)}{\sin(n\pi)}$$

Ex: Prove that

$$J_{-K}(x) = (-1)^K J_K(x)$$

$$J_{-K}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-K}}{r! \Gamma(r-K+1)}$$

$$= \sum_{r=0}^{K-1} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-K}}{r! \Gamma(r-K+1)} + \sum_{r=K}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-K}}{r! \Gamma(r-K+1)}$$

Γ (أي عدد سالب) $\rightarrow -\infty$ حيث $\Gamma(r-K+1)$ قساري
 $r-K!$ طانه قويه المقام في الحد الأول تعطي دائماً $-\infty$
 أي أن أول متسلسلة = 0.

$$\Gamma(r-K+1) = (r-K)!$$

والتجميع على m

$$\text{Let } m = r - K \Rightarrow r = m + K$$

$$J_{-K}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-1)^K \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2K-K}}{(m+K)! \Gamma(m+K-K+1)}$$

$$= (-1)^K \int \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+K}}{\Gamma(m+K+1) m!}$$

$$J_{-K}(x) = (-1)^K J_K(x) \quad \#$$

→ show that

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

من رأس المسألة نستخرج $J_{\frac{1}{2}}$ تأخذ معظم خواص
الـ (\sin) ، $J_{\frac{1}{2}}$ تأخذ معظم خواص الـ (\cos)
من ذلك بين كل هذين $J_{\frac{1}{2}}$ يوجد هذين $J_{-\frac{1}{2}}$
والعكس بالعكس والدالتين لهما تردد و يؤولا للصفر
عند $x = \infty$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \int_{r=0}^{\infty} \frac{\overset{\text{الحل}}{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\frac{1}{2}}}}{r! \Gamma(r+\frac{3}{2})}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^0 \sqrt{x}}{\sqrt{2} (1) \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} + \frac{\frac{2}{2} (-1)^1 x^2 \sqrt{x}}{\frac{2}{2} \sqrt{2} (1) (3) (1) \sqrt{\pi}} + \dots$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}$$

الحداه
فونز: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

~~$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$$~~

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[x - \frac{x^3}{3!} \dots \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \times \sin x$$

$$b) J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-\frac{1}{2}}}{r! \Gamma(r+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{(-1)^0 \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{(1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{(-1)^1 \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{1! \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}} - \frac{x \sqrt{x}}{\frac{2}{2} \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dots$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \right]$$

$$\therefore J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

Generating Function

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

← الدالة المولدة لدالة (Bessel) صالحة أيضاً لاستنتاج دالة (Bessel) من مفكوك الدالة الأسية.

Ex: show that

$$\frac{d}{dx} (x^K J_K) = x^K J_{K-1}$$

Sol

$$J_K = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+K}}{r! \Gamma(K+r+1)}$$

$$x^K J_K = \sum \frac{(-1)^r x^{2r+2K}}{2^{2r+K} r! (K+r)!}$$

$$\frac{d}{dx} (x^K J_K) = \sum \frac{(-1)^r 2(r+K) x^{2r+2K-1}}{2^{r+K} r! (K+r)!}$$

\downarrow
 $(K+r-1)!$

$$= x^K \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+(K-1)}}{r! \Gamma(r+(K-1)+1)}$$

$$= x^K J_{K-1}(x)$$

نستخدم هذه الخاصية في مسائل التكامل لو كانه الى
جوه x سابه صاقت الى J ب (1) نجعلهم نرى بعض
يس عليهم تفاضل بعض لو ظهر الطور الأيمن في المسألة
نفكر في طريقة تجعل التفاضل يلغى التكامل.

EX: show that

$$\frac{d}{dx} (x^{-K} J_K) = -x^{-K} J_{K+1}$$

$$x^{-K} J_K = x^{-K} \sum \frac{(-1)^r x^{(2r+K)}}{2^{2r+K} r! \Gamma(K+r+1)}$$

$$= \sum \frac{(-1)^r x^{2r}}{2^{2r+K} r! \Gamma(r+K+1)}$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-K} J_K) = \sum \frac{(-1)^r 2^r x^{2r-1}}{\frac{2r+K}{2} r! \Gamma(r+K+1)}$$

← عايز نقطع الطرف اليسار (عايز في اعظام مفرد بـ r)
 مثل مفرد بـ r في J_K .

$$m = r - 1 \Rightarrow r = m + 1$$

$$(-1)^1 \sum \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{\frac{2m+K+1}{2} m! \Gamma(m+K+2)}$$

$$= -x^{-K} \sum \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+(K+1)}}{m! \Gamma(m+(K+1)+1)}$$

$$= -x^{-K} J_{K+1}(x)$$

8 Lec 23